19/12/21

Κεφ. 1 | "Οι μιγαδικοί αριθμοί"

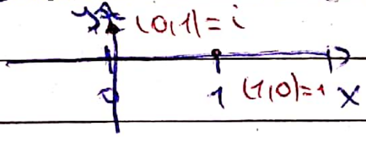
Κίνητρο: η επίλυση της εξίσωσης $x^2+1=0$ η οποία δεν έχει λύση στο $(\mathbb{R},+,\cdot)$ το σώμα των πραγματικών αριθμών $\Rightarrow$ θέλουμε να επεκτείνουμε το σώμα $(\mathbb{R},+,\cdot)$ σ' ένα σώμα, το $(\mathbb{C},+,\cdot)$, το σώμα των μιγαδικών αριθμών το οποίο περιέχει έναν (νέο, μη πραγματικό) αριθμό $i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $i^2+1=0 \Leftrightarrow i^2=-1$

Άλγεβρα (χωρίς απόδειξη εδώ): η ελάχιστη (δηλ. το "όσο το δυνατόν μικρότερο σύνολο") επέκταση είναι ένας διανυσματικός χώρος διάστασης 2 πάνω από το $\mathbb{R}$, δηλ. το $\mathbb{R}^2$ με την πρόσθεση $(x_1,y_1)+(x_2,y_2)=(x_1+x_2,y_1+y_2)$ και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό: $a(x,y):=(ax,ay)$, $x_1,y_1,x_2,y_2,x,y,a\in\mathbb{R}$ ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μία εσωτερική πράξη πολλαπλασιασμού (τον μιγαδικό πολλαπλασιασμό $\cdot:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$) η οποία ορίζεται ως $(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2)=(x_1\cdot x_2-y_1y_2,\ x_1y_2+y_1x_2)$

(Αυτή η ελάχιστη επέκταση είναι μέχρις ισομορφισμού μοναδική: Άλγεβρα)

Σχόλια/ερμηνεία: (1) αντιστοιχούμε τους μιγαδικούς αριθμούς 1-1 και επί με τα διανύσματα του $\mathbb{R}^2$

(2) οι πραγμ. αριθμοί $x\in\mathbb{R}$ αντιστοιχούν στα διανύσματα $(x,0)\in\mathbb{R}^2$, ειδικότερα $0\in\mathbb{R}$ αντιστοιχεί στο $(0,0)\in\mathbb{R}^2$ και $1\in\mathbb{R}$ αντιστοιχεί στο $(1,0)\in\mathbb{R}^2$

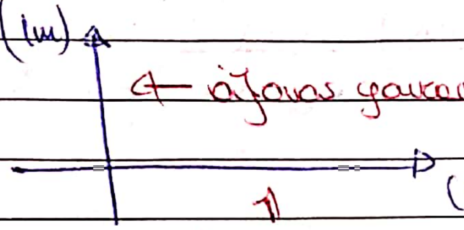


(3) Ο νέος αριθμός $i \in \mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ αντιστοιχεί στο $(0,1)\in\mathbb{R}^2$, δηλ. $i = (0,1) \in \mathbb{R}^2$ και με τον πολ/σμό που ορίσαμε έχουμε $i^2 = (0,1)\cdot(0,1) = (-1,0) = -(1,0) = -1$

(4) Σύμφωνα με τα προηγούμενα για κάθε $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ έχουμε

$$(x,y) = x\underbrace{(1,0)}_{=1\in\mathbb{R}} + y\underbrace{(0,1)}_{=i\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}} = x + yi =: z \in \mathbb{C}$$

αντιστοιχία



άξονας φανταστικών

Το $x\in\mathbb{R}$ ονομάζεται πραγματικό μέρος του $z = x+yi$ και συμβολίζεται με $x = \mathrm{Re}\, z$, ενώ

άξονας πραγμ.

το $y\in\mathbb{R}$ ονομάζεται φανταστικό μέρος του z και συμβολίζεται με $y = \mathrm{Im}\, z$ (imaginary)

(μιγαδικός αριθμός = complex number)

(5) Η πρόσθεση μιγαδικών αριθμών γίνεται όπως και η πρόσθεση διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^2$, και το ίδιο ισχύει για τον πολ/σμό μιγαδικών στο πραγμ. αρ. (= βαθμωτό πολ/σμό στον $\mathbb{R}^2$), δηλ. αν $z_1 = x_1 + y_1 i$,

$z_2 = x_2 + y_2 i$

(τα x_k, y_k, $k=1,2$, στα επόμενα πάντα πραγμ. αρ., εκτός αν αναφέρεται ρητά κάτι άλλο) τότε:

$$z_1 + z_2 = (x_1 + y_1 i) + (x_2 + y_2 i) \overset{\text{αντιστ.}}{=} (x_1, y_1) + (x_2, y_2) =$$
$$= (x_1 + x_2, y_1 + y_2) \overset{\text{αντιστ.}}{=} (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2) i$$

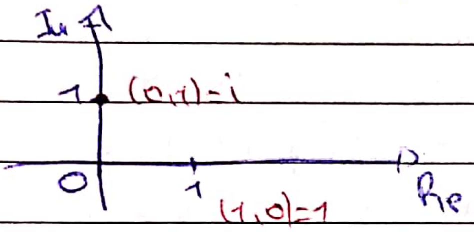
⑥ όπως είπαμε και πιο πάνω με τις πράξεις αυτές (που ορίσαμε) στο $\mathbb{C}$, αυτό γίνεται σώμα, δηλ. μπορούμε να κάνουμε όλες τις πράξεις όπως "ξέρουμε" ή έχουμε συνηθίσει από τον $\mathbb{R}$ με την επιπλέον πληροφορία ότι $i^2=-1$. Από αυτό προκύπτει ότι ο πολ/σμός στο $\mathbb{C}$ έχει αναγκαία τον ορισμό που δώσαμε: $z_1+z_2=(x_1+y_1 i)(x_2+y_2 i)=$

$$= (x_1 \cdot x_2 + y_1 y_2 \underbrace{i^2}_{=-1} + x_1 y_2 i + (y_1 x_2 + x_1 y_2) i =$$

$$= (x_1 x_2 - y_1 y_2) + (x_1 y_2 + y_1 x_2) i,$$ δηλ. αντίστοιχα:

$$(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2) = (x_1 x_2 - y_1 y_2,\ x_1 y_2 + y_1 x_2)$$

⑦ Το σώμα των πραγματικών $\mathbb{R}$ είναι υποσύνολο του $\mathbb{C}$. Για $x\in\mathbb{R}$ αντιστοιχούμε: $x = (x,0) = \underbrace{x+0i}_{=x(1,0)}$



και οι πράξεις στο $\mathbb{C}$ επεκτείνουν τις πράξεις στο $\mathbb{R}$(*). $x_1+x_2 = (x_1,0)+(x_2,0) = (x_1+x_2,0) = x_1+x_2+0i \ (= x_1+x_2)$.

(*) οι πράξεις στο $\mathbb{C}$ είναι συμβατές με τις πράξεις στο $\mathbb{R}$ (για $x_1,x_2\in\mathbb{R}$) και $x_1\cdot x_2 = (x_1,0)(x_2,0) =$
$= (x_1x_2 - 0\cdot 0,\ x_1\cdot 0 + x_2\cdot 0) = (x_1x_2, 0) = (x_1x_2 + 0i) = (x_1\cdot x_2)$

Επίσης ο πολ/σμός στο $\mathbb{C}$ είναι συμβατός με τον βαθμωτό πολ. στο $\mathbb{R}^2$: για $a\in\mathbb{R}$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$: $\to \underset{\in\mathbb{R}}{a}\underbrace{(x,y)}_{\in\mathbb{R}^2} = (ax, ay)$ βαθμ. πολ. στο $\mathbb{R}^2$

και $a(x,y) = (a,0)(x,y) =$

αντιστοιχίζω $a\in\mathbb{R}$ με $(a,0)\in\mathbb{R}^2$

$= (ax - 0\cdot y,\ ay + 0\cdot x) = (ax, ay)$

πολ. στον $\mathbb{R}^2$

(8) Το ουδέτερο στοιχείο της πρόσθεσης στο $\mathbb{C}$ είναι το $(0,0)$ $[\ (x,y) + (0,0) = (x+0, y+0) = (x,y)\ ]$ ~~το αντίθετο~~ δηλ. για $z = x+yi$
$(x,y) \in \mathbb{R}^2$: $z + \underset{\in \mathbb{R}}{0} = (x+yi)$
$= (0,0) \in \mathbb{R}^2 = 0 + 0i \in \mathbb{C}$

και το αντίθετο (δηλ. το αντίστροφο ως προς την πρόσθεση) του $z = x+yi = x\cdot \underset{(1,0)}{1} + y\cdot \underset{(0,1)}{i} = x(1,0) + y(0,1) = (x,y)$

είναι το:
$-z = (-x) + (-y)i = -x - yi$, αφού:
$z - z = z + (-z) = x + yi + (-x) + (-y)i = x - x + (y-y)i =$
$= 0 + 0i = 0$

(9) Το ουδέτερο στοιχείο του πολλ. στο $\mathbb{C}$ είναι το $(1,0) = 1 \in \mathbb{R}$, αφού: $z\cdot 1 = (x+yi)\cdot 1 = (x,y)\cdot(1,0) =$
$= (x - 0y,\ x\cdot 0 + 1\cdot y) = (x,y) = x + yi = z$

(10) Ποιος είναι ο αντίστροφος του $z \in \mathbb{C}^* := \mathbb{C}\setminus\{0\}$?
Ένας μιγαδικός αριθμός $w \in \mathbb{C}^*$
$\quad = a + bi$ με $(a,b) \in \mathbb{R}^2$
$zw = 1$
$\Leftrightarrow (x+yi)(a+bi) = xa - yb + (ya + xb)i = 1 + 0i \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow (xa - yb,\ ya + xb) = (1,0)$
$\Leftrightarrow \begin{cases} xa - yb = 1 \\ ya + xb = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

Επειδή $x^2 + y^2 \neq 0$ [αφού $(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \Leftrightarrow z \in \mathbb{C}^*$]
$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x & -y \\ y & x \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{x^2+y^2} \begin{pmatrix} x \\ -y \end{pmatrix}$

Scanned with CamScanner

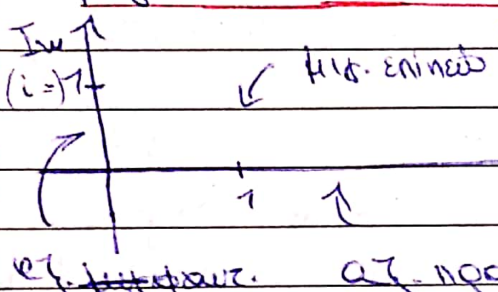
Άρα ο αντίστροφος του $z = x+yi \in \mathbb{C}^*$ είναι ο

$$\underset{\text{(Συμβολισμός)}}{z^{-1}} = \frac{1}{z} = \frac{x}{x^2+y^2} + \frac{-y}{x^2+y^2}\, i = \frac{1}{x^2+y^2}(x-yi)$$

[Θα δούμε αμέσως μια πιο πρακτική μορφή του z^{-1}]

(11) Τέλος για τις πράξεις στο $\mathbb{C}$ ισχύουν οι προσεταιριστικότητα, (ως −) μεταθετικότητα, επιμεριστικότητα (όπως στο $\mathbb{R}$) [εύκολο τσεκάρισμα, βλ. Σημ.]

(12) Το επίπεδο του $\mathbb{R}^2$ ονομάζεται στη μιγαδική ανάλυση μιγαδικό επίπεδο, ο άξονας $x(1,0)$, $x \in \mathbb{R}$ ονομάζεται άξονας των πραγματικών, ο άξονας $y(0,1) = yi$, $y \in \mathbb{R}$ ονομάζεται άξονας των φανταστικών

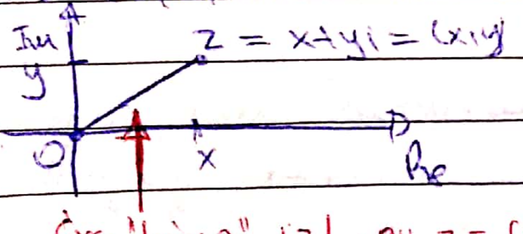


Κάποια επιπλέον ορισμοί για μιγ. αρ. $z = x+yi \in \mathbb{C}$ με $(x, y \in \mathbb{R})$: $\mathrm{Re}\,z := x$ πραγμ. μέρος του z

$\mathrm{Im}\,z := y$: φαντ. −//−

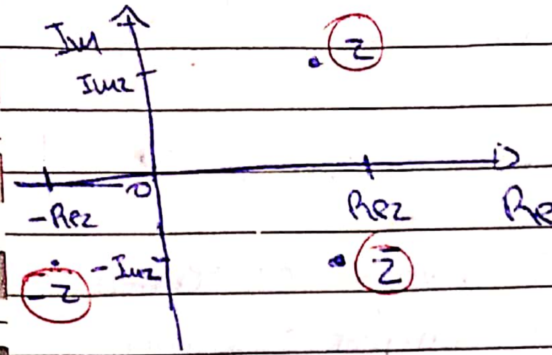
$$|z| := \sqrt{x^2+y^2} = \left[(\mathrm{Re}\,z)^2 + (\mathrm{Im}\,z)^2\right]^{1/2} \left[= \underbrace{\|(x,y)\|}_{\mathbb{R}^2}\right]$$

απόλυτη τιμή (ή μέτρο) του z [δίνει την απόσταση του ζεύγους σημείου στο μιγαδικό επίπεδο από το σημείο $0 \in \mathbb{C}$ $\Leftrightarrow$ $(0,0) \in \mathbb{R}^2$ της αρχής των αξόνων:



έχει "μήκος" $|z|$, αν $z = (x,y)$

$\bar{z} := x - yi = (\mathrm{Re} z) - (\mathrm{Im} z)i$ ο συζυγής (μιγαδικός αριθμός) του $z \in \mathbb{C}$



Πρόταση: Για $z, z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ ισχύουν οι ακόλουθες ιδιότητες:

$\mathrm{Re} z = \frac{z+\bar z}{2}$ [$z = x+iy$, $\bar z = x - iy \Rightarrow z + \bar z = 2x = 2\mathrm{Re}z$]

$\mathrm{Im} z = \frac{z-\bar z}{2i}$, $z\cdot\bar z = |z|^2$ [$(x+iy)(x-iy) = x^2+y^2 + (-xy+xy)i = x^2+y^2 = |z|^2$]

$|-z| = |z| = |\bar z|$, $\bar{\bar z} = z$, $\overline{z_1+z_2} = \bar z_1 + \bar z_2$

από

$\overline{z_1 z_2} = \bar z_1 \bar z_2$ [$(x_1+y_1 i)(x_2+y_2 i) = (x_1x_2 - y_1y_2 + (x_1y_2 + y_1y_2)i \Rightarrow \overline{z_1 \cdot z_2} = (x_1x_2 - y_1y_2) - i(x_1y_2+y_1x_2)$, και από την άλλη:
$\bar z_1\cdot \bar z_2 = (x_1 - y_1 i)(x_2 - y_2 i) = (x_1x_2 - y_1y_2 - (y_1x_2+x_1y_2)i$]

$|z_1\cdot z_2| = |z_1||z_2|$, $\underbrace{|\mathrm{Re}z| \le |z|}_{\circ}$, $|\mathrm{Im} z|\le|z|$

$\Leftrightarrow$ $|x| \le \|(x,y)\|$

και η τριγωνική ανισότητα της απόλυτης τιμής μιγ. αριθμών: $|z_1+z_2| \le |z_1|+|z_2|$ [$\Leftrightarrow \|(x_1+x_2, y_1+y_2)\| \le \|(x_1,y_1)\| + \|(x_2,y_2)\|$]

Παραδείγματα: [Νουθεσία: Πρακτικώς για το μάθημα απαιτείται άνεση στις πράξεις με μιγαδικούς αριθμούς]

α) $z^{-1} =: \frac{1}{z}$ [το $\frac{1}{z}$ είναι ο μιγ. αρ., ο οποίος πολλαπλασιαζόμενος με το z δίνει το $1 \in \mathbb{R} \subseteq \mathbb{C}$]

όπως $\frac{1}{z} = \frac{1}{z} \cdot 1 = \frac{1}{z}\,\frac{\bar{z}}{z} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

Χρήσιμο για να γράφουμε πηλίκο μιγαδικών αριθμών σε αλγεβρική μορφή: $z = x+iy,\ x, y \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow \frac{1}{x+iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2}$ (βλ. προηγ. σελ. εύρεσης αντιστρόφου)

β) $\left|\frac{1}{z}\right| \overset{α)}{=} \underbrace{\left|\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right|}_{\text{γλώσσα του } \mathbb{C}} \overset{\text{αντιστοίχιση}}{=} \left\|\frac{(x,-y)}{\|(x,y)\|^2}\right\| = \frac{1}{\|(x,y)\|^2}\,\frac{\|(x,-y)\|}{\|(x,y)\|} =$

$= \frac{1}{\|(x,y)\|}$

$= \frac{1}{z}$ [πιο απλά: $\left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{|z|^2}|\bar{z}| = \frac{1}{|z|^2}|z| = \frac{1}{|z|}$]

γ) $\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \overline{\left(\frac{\bar{z}}{|z|^2}\right)} = \overline{\left(\frac{x-iy}{|z|^2}\right)} = \overline{\left(\frac{x}{|z|^2} - i\frac{y}{|z|^2}\right)} =$

$= \frac{x}{|z|^2} + i\frac{y}{|z|^2} = \frac{1}{|z|^2}(x+iy) = \frac{1}{|z|^2}z = \frac{z}{|z|^2} =$

$= \frac{z}{z \cdot \bar{z}} = \frac{1}{\bar{z}}$

Scanned with CamScanner

Α1 (Άσκηση 1, Σελ.) Γράψτε σε αλγεβρική μορφή τον μιγ. αρ. $\frac{i}{1+i}$ (δηλ. ως $z = x+yi$, $x,y \in \mathbb{R}$)

$$\frac{i}{1+i} = \frac{i(1-i)}{(1+i)^2} = \frac{i+1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + i \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Εργασία: Λύνω όλες τις σχετικές ισ. / ανισώσεις στις σημ.

Βασική παρατήρηση: Μέσω μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$ και μιγαδικών συναρτήσεων $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ μπορούμε να (ανα)παραστήσουμε πολλά αποτελέσματα της Γεωμετρίας του Επιπέδου

(τετριμμένο) παράδ.: Τα σύνολα των μιγαδικών αριθμών που ικανοποιούν την εξίσωση $|z-i+3| = 5$ και τις ανισότητες $|z-i+3| < 5$ ή